

# Mécanique des structures

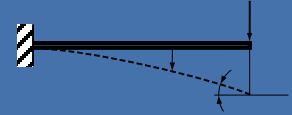
## Chapitre 8 : Flexion dérivée et flexion composée

Pr. Shea & Dr Prenleloup  
SGM BA3 2025-2026



# Chapitre 7 : Déformée des poutres droites

Rappel



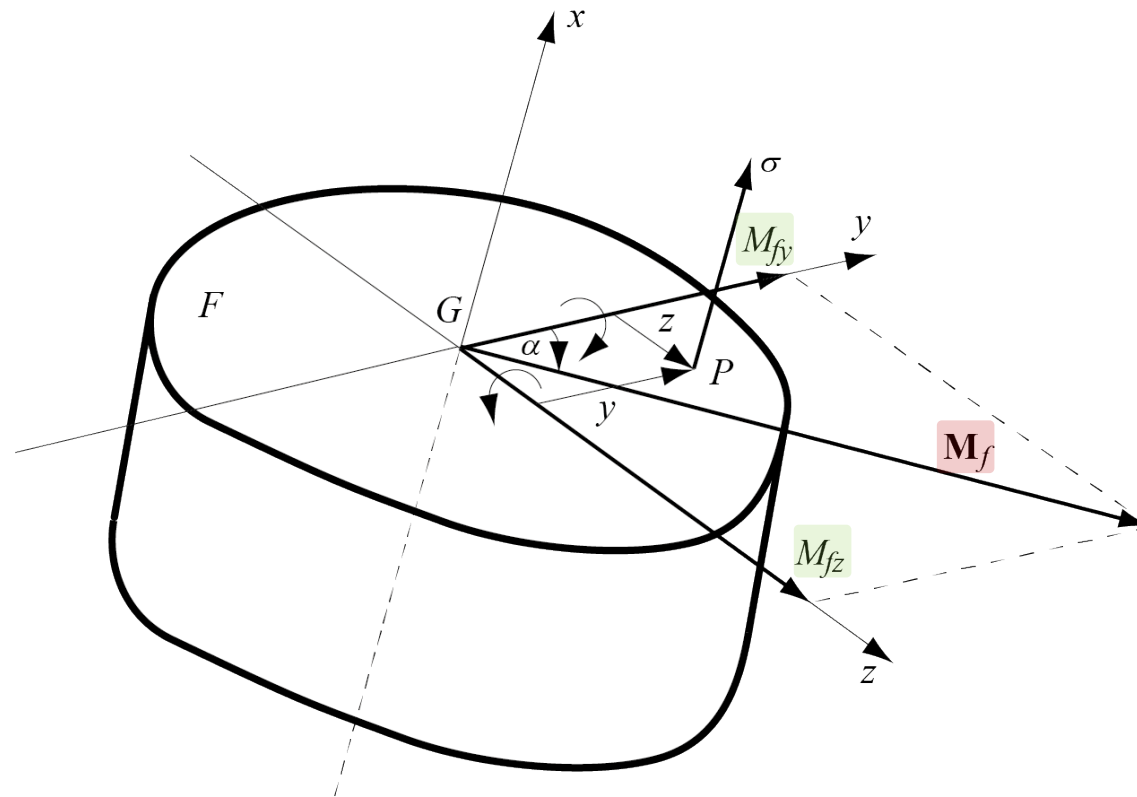


# Chapitre 8 : Flexion déviée et flexion composée

## Contrainte normale et flexion déviée

Nous avons supposé aux chapitres 6 et 7 que le moment de flexion  $\mathbf{M}_f$  se réduisait à sa composante  $M_{fz}$  selon l'axe principal  $Gz$  de la section et nous avons montré que dans ce cas la fibre moyenne d'une poutre droite restait plane après déformation (flexion plane).

Si le moment de flexion  $\mathbf{M}_f$  comporte deux composantes  $M_{fy}$  et  $M_{fz}$  selon les deux axes principaux  $Gy$  et  $Gz$  de la section, *la flexion est dite déviée*.





# Chapitre 8 : Flexion déviée et flexion composée

## Contrainte normale et flexion déviée

Pour le calcul des contraintes normales  $\sigma$ , nous nous appuyerons sur les hypothèses suivantes :

- le déplacement d'un point provoqué par le moment de flexion est normal à la section.
- une section plane avant déformation reste plane après déformation (Bernoulli).

Ces hypothèses signifient que la contrainte normale en un point  $P(y, z)$  est une fonction linéaire de  $y$  et  $z$  ( $A, B, C$  sont des facteurs de proportionnalités)

- $\sigma = Ay + Bz + C$

Comme pour la flexion plane, nous choisissons un trièdre de référence à gauche et les équations exprimant l'équilibre de la section s'écrivent pour la flexion déviée

$$(a) \quad 0 = \iint_F \sigma \, dF$$

$$(b) \quad T_y = \iint_F \tau_y \, dF$$

$$(c) \quad T_z = \iint_F \tau_z \, dF$$

$$(d) \quad 0 = - \iint_F \tau_z y - \tau_y z \, dF$$

$$(e) \quad M_{fy} = - \iint_F \sigma z \, dF$$

$$(f) \quad M_{fz} = \iint_F \sigma y \, dF$$



# Chapitre 8 : Flexion déviée et flexion composée

## Contrainte normale et flexion déviée

En introduisant l'expression de la contrainte normale dans l'équation (a) on trouve aisément que les deux premiers termes étant nuls, le facteur  $C$  est égale à zéro.

En introduisant l'expression de la contrainte normale dans l'équation (e) et (f) on peut écrire

- $$M_{fy} = -A \iint_F y z dF - B \iint_F z^2 dF$$
- $$M_{fz} = A \iint_F y^2 dF + B \iint_F z y dF$$

Comme les axes  $Gy$  et  $Gz$  sont principaux d'inertie, le moment centrifuge est nul, ce qui permet d'explicitier les deux moments de flexion  $M_{fy}$  et  $M_{fz}$  sous les formes simples suivantes

- $$M_{fy} = -B I_y$$
- $$M_{fz} = A I_z$$

Et finalement on peut exprimer la contrainte normale comme :

- $$\sigma = \frac{M_{fz}}{I_z} y - \frac{M_{fy}}{I_y} z$$

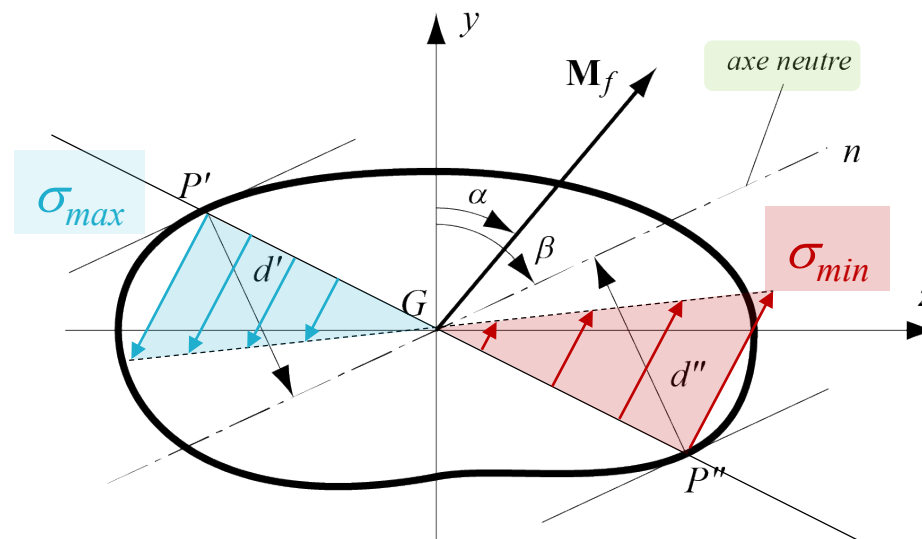
# Chapitre 8 : Flexion déviée et flexion composée

## Contrainte normale et flexion déviée

Ce résultat montre que la contrainte  $\sigma$  est la somme, compte tenu du signe, des contraintes dues aux composantes  $M_{fy}$  et  $M_{fz}$  agissant séparément. Il peut se mettre sous la forme suivante, constituant l'équation d'un plan

- $$\sigma = M_f \left( \frac{y \sin \alpha}{I_z} - \frac{z \cos \alpha}{I_y} \right)$$

où  $\alpha$  dénote l'angle entre le support du moment de flexion  $\mathbf{M}_f$  et l'axe  $Gy$ , tandis que  $M_f$  désigne l'amplitude du moment  $\mathbf{M}_f$ . La contrainte normale est nulle sur une droite passant par  $G$ , appelée axe neutre de la section pour  $\sigma = 0 = \frac{y \sin \alpha}{I_z} - \frac{z \cos \alpha}{I_y}$





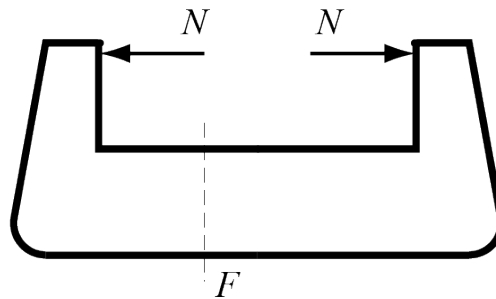
# Chapitre 8 : Flexion déviée et flexion composée

## Flexion composée de traction ou compression

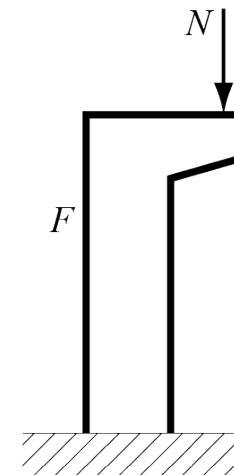
La section d'une poutre est soumise à la *flexion composée* quand le torseur des efforts intérieurs comprend une composante normale  $N$  ou/et une composante de torsion  $M_t$ , en plus du moment de flexion  $M_f$  et de l'effort tranchant  $T$ .

Nous n'étudierons que la flexion composée de traction ou de compression, en supposant de plus que l'effort tranchant est nul. Une telle combinaison d'efforts intérieurs apparaît par exemple dans un étau ou une pièce soumise à une charge décentrée

(a)

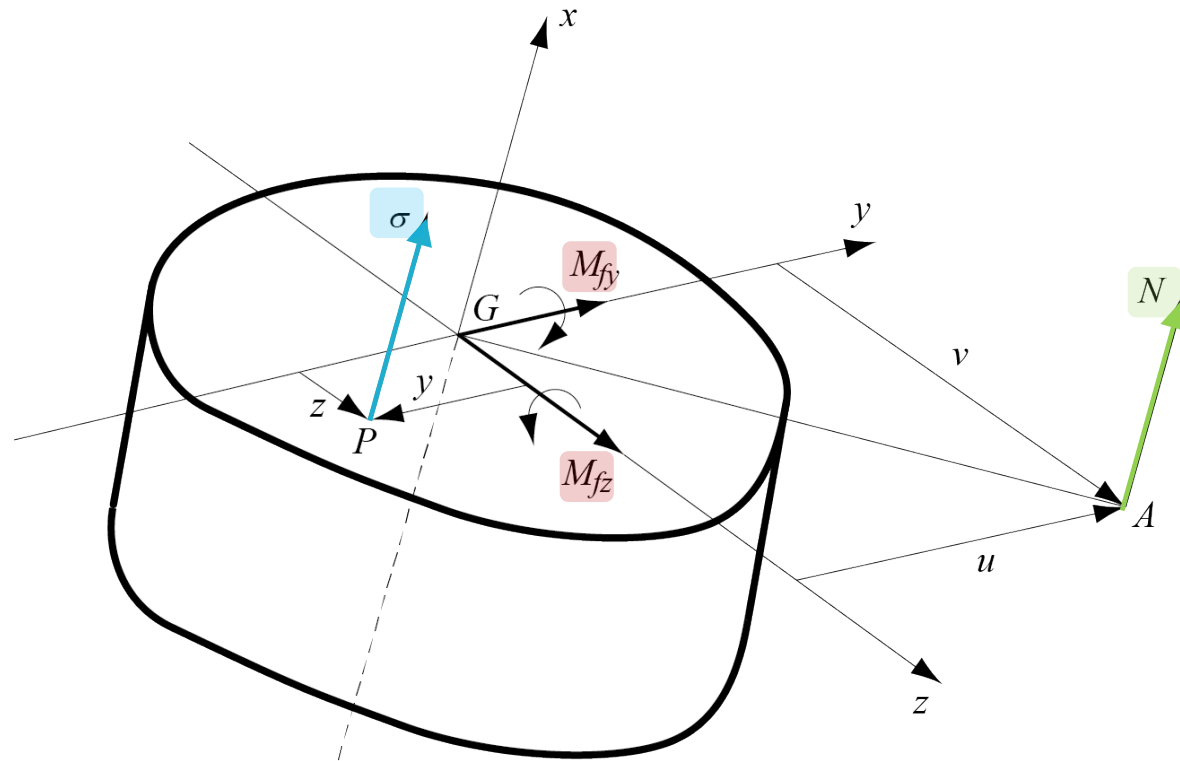


(b)



Considérons une section  $F$  soumise à une force normale excentrée  $N$  agissant au point  $A(u, v)$ , appelé centre de pression. La réduction de cette force au centre de gravité  $G$  de la section comprend un effort de traction ou compression  $N$  et un moment de flexion;  $\mathbf{M}_f$  de composantes  $M_{fy}$  et  $M_{fz}$

- $M_{fy} = -v N$
- $M_{fz} = +u N$





# Chapitre 8 : Flexion déviée et flexion composée

## Contraintes et axes neutres

Comme la contrainte normale en un point  $P(y, z)$  est la superposition des effets de  $N$ ,  $M_{fy}$  et  $M_{fz}$ , on peut écrire, d'après la relation additionnée de l'effet de  $N$

- $$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{uN}{I_z} y + \frac{vN}{I_y} z$$

Si l'on dénote les rayons de giration (annexe III.5) par les grandeurs  $i_y$  et  $i_z$  définies de la manière suivante

- $$i_y^2 = \frac{I_y}{F}$$

- $$i_z^2 = \frac{I_z}{F}$$

La contrainte normale  $\sigma$  peut se mettre sous la forme

- $$\sigma = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{u}{i_z^2} y + \frac{v}{i_y^2} z \right)$$

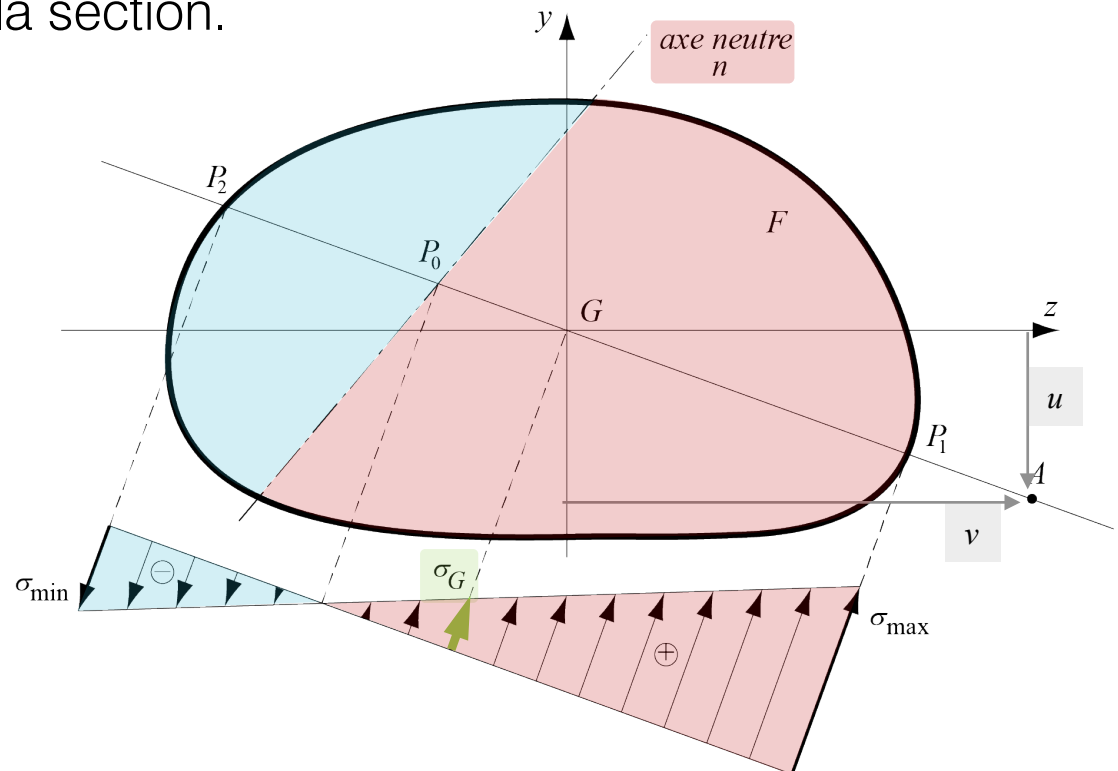
Ainsi que nous l'avons vu en flexion déviée, le lieu des points où la contrainte  $\sigma$  s'annule est une droite appelée **axe neutre**, qui a cette fois pour équation  $\sigma = 0$

- $$\frac{u y}{i_z^2} + \frac{v z}{i_y^2} = -1$$

L'axe neutre sépare la section en deux parties, l'une tendue ( $\sigma > 0$ ) et l'autre comprimée ( $\sigma < 0$ ), dont l'importance relative ne dépend que de la position du point  $A$  par rapport au centre de gravité de la section.

La contrainte varie linéairement dans  $F$  et sa valeur au centre de gravité ( $y = 0, z = 0$ ) est  $\sigma_G = N/F$ .

La contrainte  $\sigma$  sur la droite  $GA$  est illustrée à la figure, où l'on relèvera qu'elle est nulle, maximum et minimum respectivement aux points  $P_0, P_1$  et  $P_2$ .



# Midterm du 14 novembre 2022

**Consignes** : Vous avez le droit d'utiliser *tout le matériel du cours* (livre, support de cours, note personnelle, données et corrigés des séries d'exercices) et une calculatrice simple non programmable.

Vous devez inscrire les résultats (*réponses numérique et analytique*) sur les feuilles prévues à cet effet (aucune feuilles annexées). *Une valeur numérique incorrecte sans expression analytique ne donnera aucun point à la question considérée.*

# Annexe III : Moment d'une aire plane

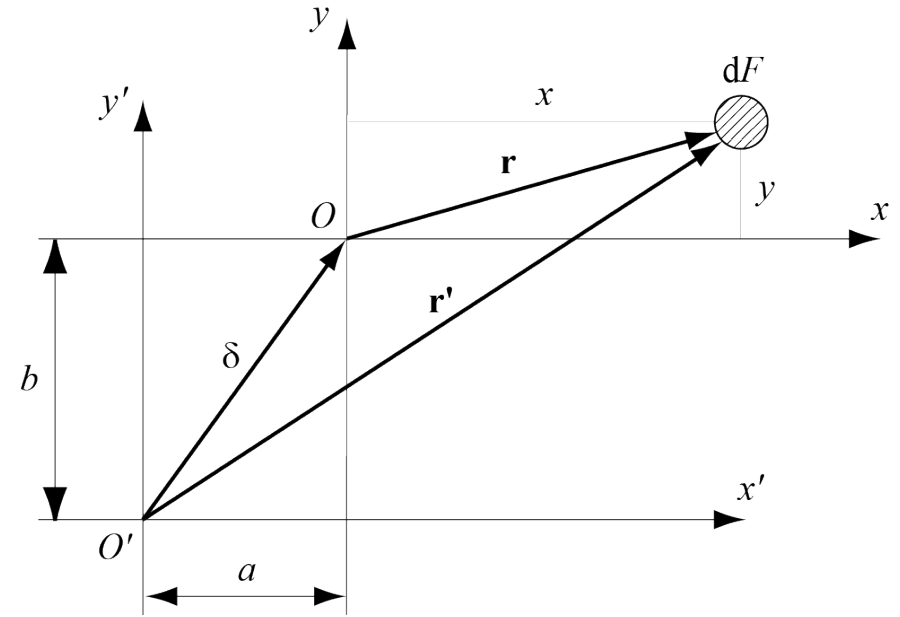
## Effet de translation des axes de coordonnées

En considérant la translation

- $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}$
- $x' = x + a$
- $y' = y + b$

Par rapport au référentiel  $O'x'y'$ , les moments du second ordre ont pour expression

- $$I_{p'} = \iint_F r'^2 dF = \iint_F [(x + a)^2 + (y + b)^2] dF = I_p + \underbrace{2(aS_y + bS_x)}_{= 0} + \delta^2 F$$



Dans le cas particulier où le point  $O$  coïncide avec le centre de gravité  $G$

- $I_{p'} = I_p + \delta^2 F$
- $I_{x'} = I_x + b^2 F$
- $I_{y'} = I_x + a^2 F$

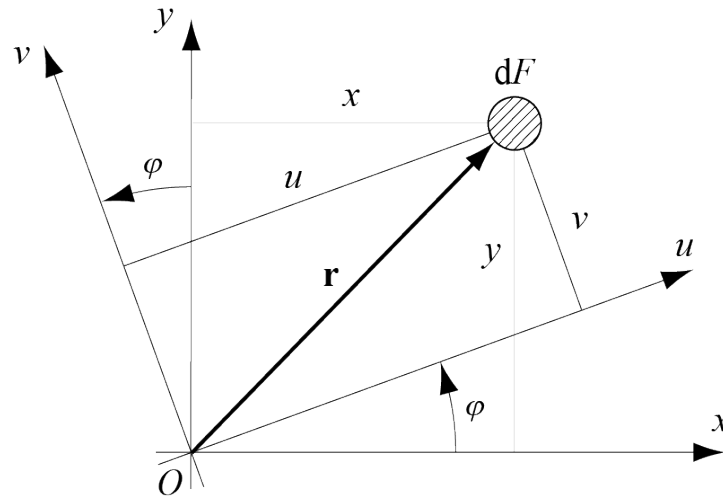
# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Effet de rotation des axes de coordonnées

Déterminons les moments du second ordre relativement aux axes  $Ou$  et  $Ov$  qui se déduisent des axes respectifs  $Ox$  et  $Oy$  par une rotation d'angle  $\varphi$

On peut écrire les formules pour la rotation des axes

- $u = x \cos \varphi + y \sin \varphi$
- $v = y \cos \varphi - x \sin \varphi$



# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Effet de rotation des axes de coordonnées

Les moments du second ordre selon les axes  $u$  et  $v$  s'écrivent :

- $$I_u = \iint_F v^2 dF = \cos^2 \varphi \iint_F y^2 dF + \sin^2 \varphi \iint_F x^2 dF - 2 \sin \varphi \cos \varphi \iint_F xy dF$$
$$= \cos^2 \varphi I_x + \sin^2 \varphi I_y - 2 \cos \varphi \sin \varphi I_{xy}$$
- $$I_v = \iint_F u^2 dF = \sin^2 \varphi I_x + \cos^2 \varphi I_y + 2 \cos \varphi \sin \varphi I_{xy}$$
- $$I_{uv} = \iint_F uv dF = \sin \varphi \cos \varphi (I_x - I_y) + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) I_{xy}$$

Et pour le moment d'inertie polaire

- $$I_p = I_u + I_v = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) I_x + (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) I_y = I_x + I_y$$

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Axes et moments principaux d'inertie

En introduisant l'angle  $2\varphi$ , les moments du second ordre peuvent être explicités sous la forme :

- $I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$
- $I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\varphi + I_{xy} \sin 2\varphi$
- $I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi$

Au vu de ces résultats, on constate que les moments  $I_u$  et  $I_v$  ne s'annulent jamais, mais qu'ils oscillent autour de la valeur moyenne  $(I_x + I_y)/2$

Si l'on cherche les extrema des ces fonctions calculant le zéro de leur dérivée par l'angle  $2\varphi$ , on obtient la relation suivante

- $\tan 2\varphi = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Axes et moments principaux d'inertie

On obtient les extrema  $I_1$  et  $I_2$  en insérant dans les expressions des moment d'inertie les valeurs de  $\sin 2\varphi$  et  $\cos 2\varphi$  tirées de l'équation précédente.

Ce qui permet de définir  $I_1$  et  $I_2$  qui sont les *moments principaux d'inertie* relativement à l'origine  $O$  des coordonnées et les axes correspondants sont les appelés les *axes principaux d'inertie* pour lesquels, par définition, le moment centrifuge  $I_{12}$  est nul

$$\bullet \quad I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\sin 2\varphi = \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}}$$

$$\bullet \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}}$$

Quand les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont principaux d'inertie, les relations s'écrivent simplement, le moment centrifuge  $I_{xy}$  étant nul

$$\bullet \quad I_1 = I_x$$

$$\bullet \quad I_2 = I_y$$

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Ellipse d'inertie

Définissons l'ellipse d'inertie : Par un point  $O$  du plan d'une aire, prenons comme axes de coordonnées les axes principaux  $O_1 = O_x$  et  $O_2 = O_y$  et considérons la paire d'axes  $O_u$  et  $O_v$ , tournée d'un angle  $\varphi$  par rapport aux précédents.

Les moments d'inertie principaux étant  $I_1$  et  $I_2$ , rapportons à l'aire  $F$  le moment d'inertie  $I_u$  donné à la relation

- $I_u = \cos^2 \varphi I_x + \sin^2 \varphi I_y - 2 \cos \varphi \sin \varphi I_{xy}$
- $\frac{I_u}{F} = \frac{I_1}{F} \cos^2 \varphi + \frac{I_2}{F} \sin^2 \varphi$

En introduisant les distances (appelées rayons de giration) dans l'équation précédente

- $i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{F}}$
- $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{F}}$
- $i_u = \sqrt{\frac{I_u}{F}}$

# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Ellipse d'inertie

On trouve l'égalité

- $i_u^2 = i_1^2 \cos^2 \varphi + i_2^2 \sin^2 \varphi$

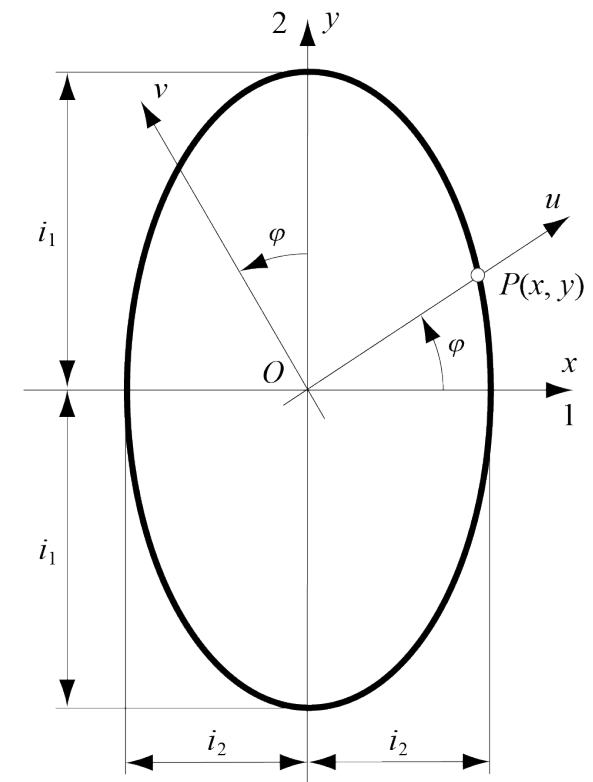
Choisissons maintenant sur l'axe  $Ou$  un point  $P(x, y)$  tel que sa distance à l'origine  $O$  ait pour valeur

- $OP = \frac{i_1 i_2}{i_u}$

On peut alors définir le lieu géométrique caractéristique de ce point par les coordonnées  $x$  et  $y$

- $x = \frac{i_1 i_2}{i_u} \cos \varphi$

- $y = \frac{i_1 i_2}{i_u} \sin \varphi$



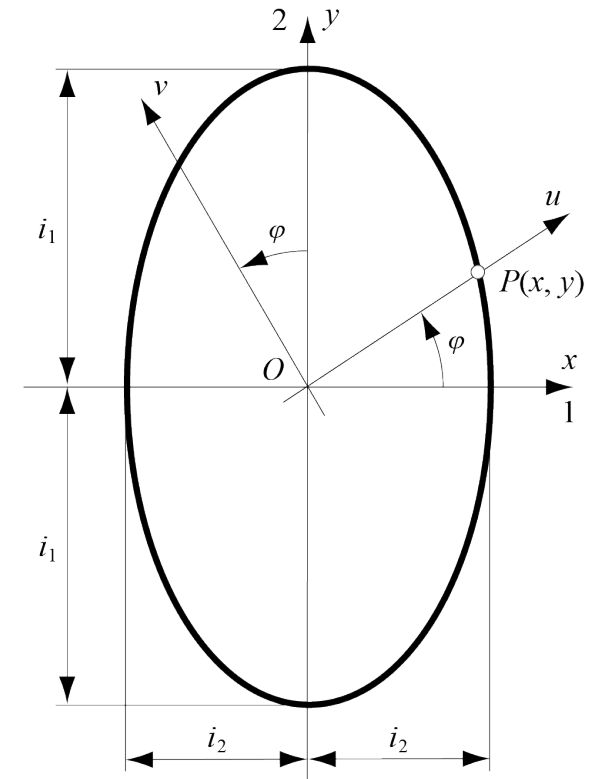
# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Ellipse d'inertie

En portant le carré de ces résultats dans l'équation du rayon de giration  $i_u^2$ , on trouve l'expression l'équation de l'*ellipse d'inertie*, de demi-axes  $i_1$  et  $i_2$ , relative au point  $O$ .

- $$\frac{x^2}{i_2^2} + \frac{y^2}{i_1^2} = 1$$

Quand l'origine  $O$  et le centre d'inertie  $G$  sont confondus, l'ellipse est dite centrale d'inertie.

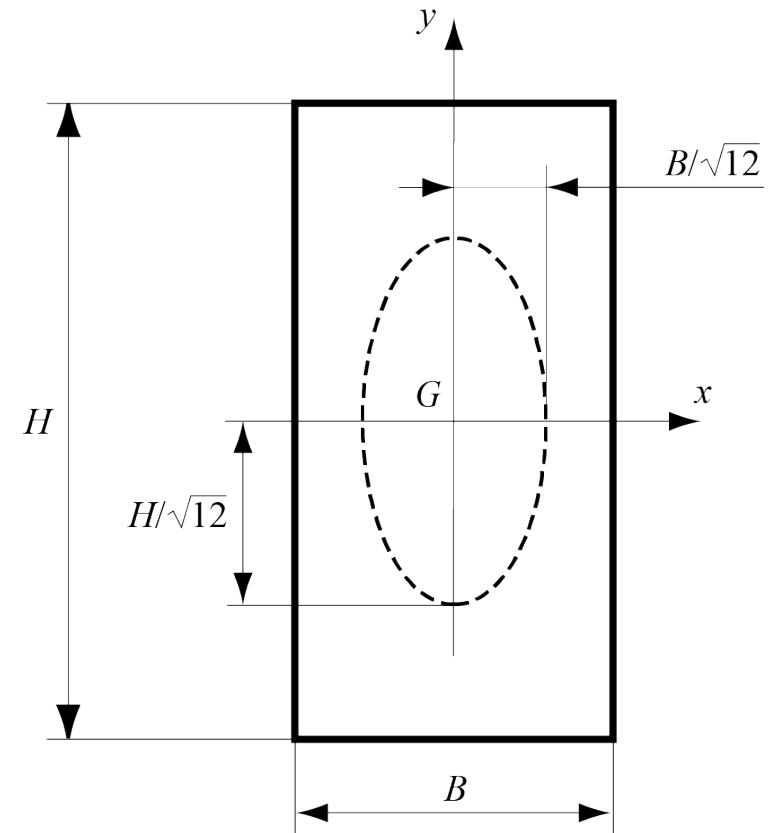


# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Ellipse d'inertie

A titre d'illustration, considérons le calcul de l'ellipse d'inertie d'un rectangle de largeur  $B$  et hauteur  $H$

- $I_1 = I_x = \frac{BH^3}{12}$
- $I_2 = I_y = \frac{HB^3}{12}$



# Annexe III : Moment d'une aire plane

## Ellipse d'inertie

Exemple d'une aire dont l'ellipse centrale d'inertie n'est pas orientée selon les axes  $Gx$  et  $Gy$ . Décomposition de la section en trois aires rectangulaires élémentaires notées 1, 2 et 3

